

## FONCTION LOGARITHME, FONCTION EXPONENTIELLE

### I. Donner les propriétés et la représentation graphique des fonctions logarithme et exponentielle

- **Exemple :** Donner, le sens de variation et la représentation graphique des fonctions :

$$f: x \mapsto \ln x$$

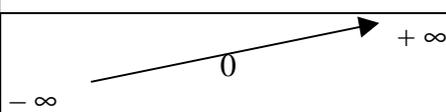
$$g: x \mapsto e^x$$

- **Méthode :** Il s'agit d'utiliser les résultats du cours

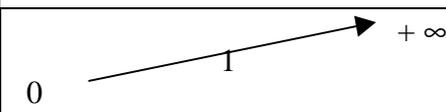
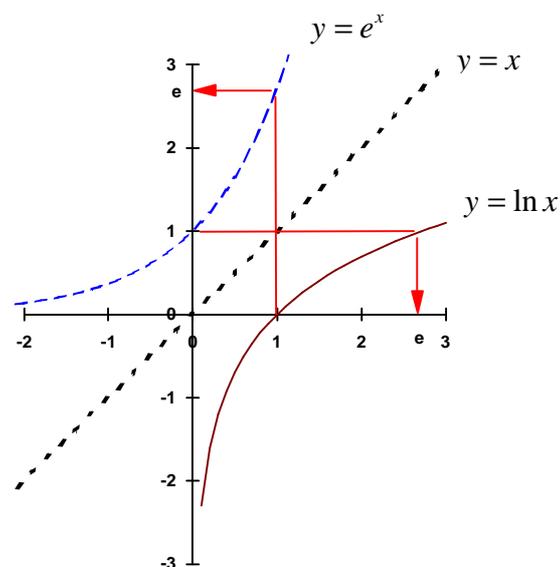
| $f(x) = \ln x$  | $g(x) = e^x$  |
|---|---|
| $x \rightarrow +\infty \Rightarrow \ln x \rightarrow +\infty$ | $x \rightarrow +\infty \Rightarrow e^x \rightarrow +\infty$ |
| $x \rightarrow 0 \Rightarrow \ln x \rightarrow -\infty$       | $x \rightarrow -\infty \Rightarrow e^x \rightarrow 0$       |
| $x = 1 \Rightarrow \ln x = 0$                                 | $x = 0 \Rightarrow e^x = 1$                                 |
| $x = e \Rightarrow \ln x = 1$                                 | $x = 1 \Rightarrow e^x = e$                                 |
| $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$                                     | $g'(x) = e^x > 0$   |

- **Solution :**

|         |           |   |           |
|---------|-----------|---|-----------|
| $x$     | 0         | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         |   |           |
| $f(x)$  | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |



|         |           |   |           |
|---------|-----------|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | +         |   |           |
| $g(x)$  | 0         | 1 | $+\infty$ |

Les fonctions  $f$  et  $g$  sont réciproques, c'est-à-dire que  $y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x$ . Les graphes sont symétriques par rapport à la droite d'équation  $y = x$ .

En utilisant les touches  $\boxed{\ln}$  et  $\boxed{\text{inv}} + \boxed{\ln}$  de la calculatrice, on obtient les valeurs suivantes

|         |      |      |      |      |   |      |     |     |     |     |     |
|---------|------|------|------|------|---|------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $x$     | -2   | -1,5 | -1   | -0,5 | 0 | 0,5  | 1   | 1,5 | 2   | 2,5 | 3   |
| $\ln x$ |      |      |      |      |   | -0,7 | 0   | 0,4 | 0,7 | 0,9 | 1,1 |
| $e^x$   | 0,14 | 0,22 | 0,36 | 0,6  | 1 | 1,65 | 2,7 | 4,5 | 7,4 | 12  | 20  |

## II. Appliquer les propriétés des fonctions logarithmes :

- **Exemple :** calculer  $\ln \frac{73}{26} + \ln 13$   $\frac{1}{4} \log(2,45)^4$
- **Méthode :** on utilise les formules  
 $\ln(ab) = \ln a + \ln b$   $\log(ab) = \log a + \log b$   
 $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$   $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$   
 $\ln a^n = n \ln a$   $\log a^n = n \log a$
- **Solution :**  
 $\ln \frac{73}{26} + \ln 13 = \ln \frac{73 \times 13}{26} = \ln \frac{73}{2} = \ln 73 - \ln 2 \approx 4,29 - 0,69 = 3,6$   
 $\frac{1}{4} \log(2,45)^4 = \frac{1}{4} \times 4 \log 2,45 = \log 2,45 \approx 0,389$

## III. Résoudre une équation du type $a^x = b$ :

- **Exemple :** résoudre l'équation  $(1,05)^x = 2,84$
- **Méthode :** on passe chaque membre en logarithme
- **Solution :**  $\ln(1,05)^x = \ln 2,84$   
 $x \ln 1,05 = \ln 2,84$   
 $x = \frac{\ln 2,84}{\ln 1,05}$   
 $x \approx \frac{1,0438}{0,0488} \approx 21,39$

## IV. Calculer la durée d'un placement à intérêts composés :

- **Exemple :** Un capital de 15 000 € est placé à un taux annuel de 5 %. La capitalisation des intérêts est annuelle. La valeur acquise se monte à 22 161,83 €. Calculer en années, la durée du placement.
- **Méthode :** on part de la formule des intérêts composés

$$C_n = C_0(1+i)^n \Leftrightarrow (1+i)^n = \frac{C_n}{C_0} \Leftrightarrow \ln(1+i)^n = \ln \frac{C_n}{C_0} \Leftrightarrow n \ln(1+i) = \ln \frac{C_n}{C_0} \Leftrightarrow n = \frac{\ln \frac{C_n}{C_0}}{\ln(1+i)}$$

- **Solution :**

Ici on a l'équation :  $22161,83 = 15\,000(1+0,05)^n$

D'où :  $(1,05)^n = \frac{22\,161,83}{15\,000}$

On passe en logarithmes :  $\ln(1,05)^n = \ln \frac{22\,161,83}{15\,000} \Rightarrow n \ln(1,05) = \ln \frac{22\,161,83}{15\,000}$

D'où  $n = \frac{\ln \frac{22\,161,83}{15\,000}}{\ln(1,05)} = \frac{\ln(22\,161,83) - \ln(15\,000)}{\ln(1,05)}$

Et  $n \approx \frac{10,006 - 9,615}{0,04879} \Rightarrow n = 8$